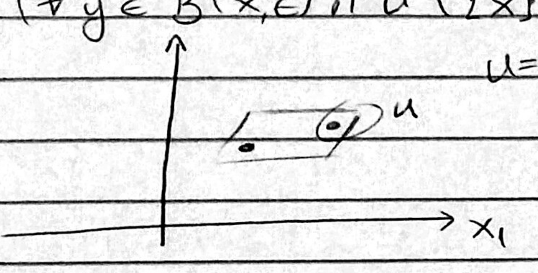
Τοπικά Ακρότατα

Επανάληψη

① Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$. Τότε η f έχει στο $\bar{x} \in U$ (γνήσιο) τοπικό ελάχιστο αν $\exists\, \epsilon > 0 \ \forall \bar{y} \in B(\bar{x}, \epsilon) \cap U$
$f(\bar{x}) \le f(\bar{y})$
$(\forall \bar{y} \in B(\bar{x}, \epsilon) \cap U \setminus \{\bar{x}\} : f(\bar{x}) < f(\bar{y}))$



Αντίστοιχα (γνήσιο) τοπικό μέγιστο.

② Η f έχει στο $\bar{x} \in U$ (γνήσιο) ολικό ελάχιστο αν $\forall \bar{y} \in U$
$f(\bar{x}) \le f(\bar{y})$ $\quad (\forall \bar{y} \in U \setminus \{\bar{x}\} : f(\bar{x}) < f(\bar{y}))$

③ Κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε συμπαγές U λαμβάνει μέγιστο και ελάχιστο (ολικά)

④ Αναγκαία συνθήκη ύπαρξης τοπικών ακροτάτων:
$U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f: U \to \mathbb{R}$ μερικώς διαφορίσιμη στο σημείο τοπ. ακροτ. $\bar{x} \in U \Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$

⑤ Ικανή συνθήκη: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό $f \in C^2(U)$ και $\bar{x} \in U$ με $\nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$. Τότε:

α) αν ο εσσιανός πίνακας της f στο $\bar{x}$. $Hf(\bar{x})$ είναι θετικά ορισμένος $\Rightarrow$ η f έχει στο $\bar{x}$ γνήσιο τοπικό ελάχιστο

β) Αν η $Hf(\bar{x})$ είναι αρνητικά ορισμένος $\Rightarrow$ η f έχει στο $\bar{x}$ γνήσιο τοπικό μέγιστο

γ) αν ο $Hf(\bar{x})$ είναι μη ορισμένος $\Rightarrow$ η f δεν έχει στο $\bar{x}$ τοπικό ακρότατο αλλά σαγματικό σημείο, δηλ. $\forall \epsilon > 0$

$\exists\, \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in B(\bar{x}, \varepsilon) \cap U \setminus \{\bar{x}\}$, έτσι ώστε $f(\bar{x}_1) < f(\bar{x}) < f(\bar{x}_2)$

(δηλ. σε κάθε οσοδήποτε μικρή περιοχή του $\bar{x}$ έχουμε και τιμές της f μικρότερες και μεγαλύτερες του $f(\bar{x})$)

πχ.

η $f(x,y) = x^2 - y^2$ έχει στο $(0,0)$ σαγματικό σημείο

Πράγματι $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ $\nabla f(x,y) = (2x, -2y) \overset{!}{=} (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

Είναι το μοναδικό σημείο όπου πιθανώς η f έχει ακρότατο

Είναι πράγματι το $(0,0)$ ακρότατο

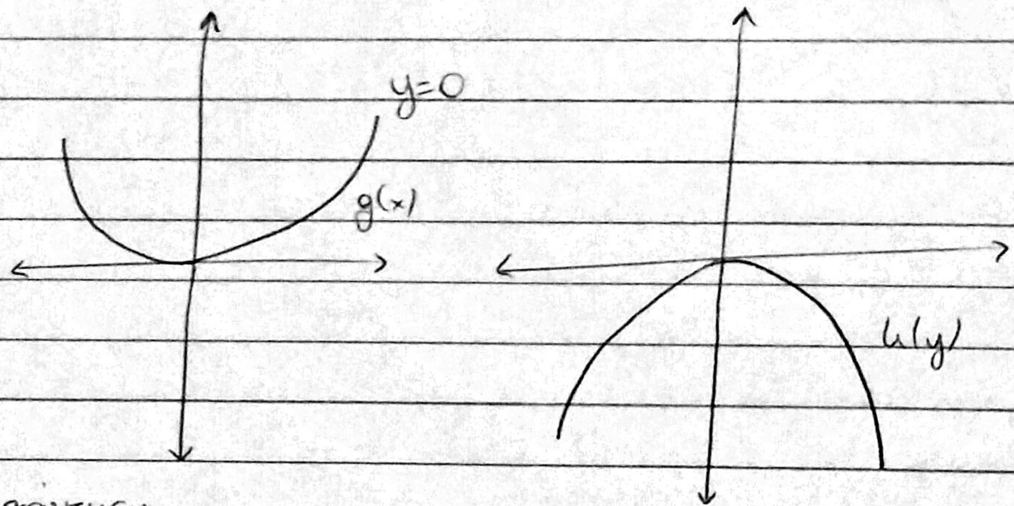
Παρατηρούμε:

- $f(x,0) = x^2 =: g(x)$, $x \in \mathbb{R}$

  έχει ολικό γνήσιο ελάχιστο στο $x=0$

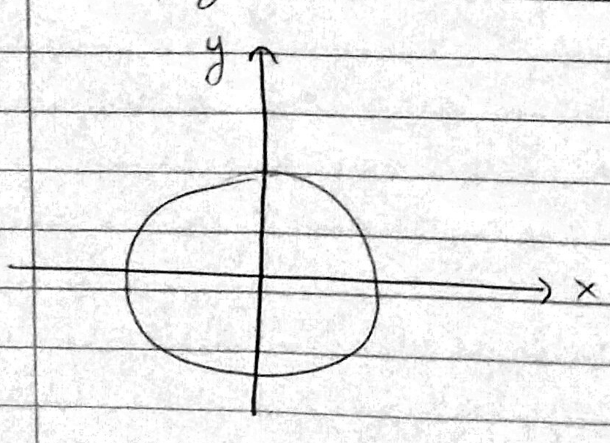
- $f(0,y) = -y^2 =: h(y)$, $y \in \mathbb{R}$

  έχει ολικό γνήσιο μέγιστο στο $y=0$



απάντηση

Όχι, η f με $f(0,0)=0$ δεν έχει στο $(0,0)$ ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο αφού $\forall \tilde{\varepsilon} > 0$ $f(\tilde{\varepsilon},0) = \tilde{\varepsilon}^2 > f(0,0) = 0 > f(0,\tilde{\varepsilon}) = -\tilde{\varepsilon}^2$



Ορισμός/Πρόταση:
Ένας συμμετρικός τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ονομάζεται
• θετικά ορισμένος: $:\Leftrightarrow \bar{u}^T A \bar{u} = (u_1, \dots, u_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} > 0$

$\forall \bar{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $\Leftrightarrow$ όλες οι ιδιοτιμές του A είναι θετικές
(θετικά ~~ορισμένες~~ ημιορισμένες $\Leftrightarrow \bar{u}^T A \bar{u} \geq 0 \ \forall \bar{u} \in \mathbb{R}^n$)
• αρνητικά ορισμένος: $:\Leftrightarrow \bar{u}^T A \bar{u} < 0 \ \forall \bar{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$
$\Leftrightarrow$ όλες οι ιδιοτιμές του A είναι αρνητικές
(αρνητικά ημιορισμένος $:\Leftrightarrow \bar{u}^T A \bar{u} \leq 0 \ \forall \bar{u} \in \mathbb{R}^n$)
• μη ορισμένος: $:\Leftrightarrow$ ο A δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ημιορισμένος $\Leftrightarrow$ ο A έχει και θετικές και αρνητικές ιδιοτιμές

απόδειξη του (α)
Έστω $A := Hf(\bar{x})$. Από το Θ. Taylor έχουμε
$f(\bar{x}+\bar{u}) = f(\bar{x}) + \nabla f(x)\cdot \bar{u} + \frac{1}{2}\bar{u}^T A \bar{u} + \phi(\bar{u})$ με
$\phi(u) = o(\|\bar{u}\|^2)$ για $\bar{u} \to \bar{0} \Leftrightarrow \lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \frac{\phi(\bar{u})}{\|\bar{u}\|^2} = 0$

ΘΔΟ: για αρκετά μικρά $\bar{u} \neq \bar{0}$ δηλ. για $\bar{u} \in B(\bar{0}, \delta) \setminus \{\bar{0}\}$
ισχύει $\underbrace{\frac{1}{2}\bar{u}^T A \bar{u}}_{>0} + \phi(\bar{u}) > 0$

πχ
Αν $A = I$
$\frac{1}{2}\|\bar{u}\|^2 + \phi(\bar{u}) > 0$ για $\bar{u} \in B(0, \delta) \setminus \{0\}$
$\Leftrightarrow \|\bar{u}\|^2 \left(\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{\phi(\bar{u})}{\|\bar{u}\|^2}}_{\to 0} \right) > 0$

$**$ $\phi(\bar{u}) = o(\|\bar{u}\|^2)$ για $\bar{u} \to 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \bar{u} \in B(0, \delta):$
$|\phi(\bar{u})| \leq \varepsilon \|\bar{u}\|^2$

Η $*$ συνάρτηση (τετραγωνική μορφή) $\bar{u} \to \bar{u}^T A \bar{u}$ $\bar{u} \in \mathbb{R}$
είναι συνεχής (ΑΣΚΗΣΗ)
[ως πολυώνυμο 2ου βαθμού του $\bar{u}$]

Η (*) σφαίρα $S=\{\bar u\in\mathbb{R}^n : \|\bar u\|=1\}$ είναι συμπαγής (ΑΣΚΗΣΗ)

Φραγμένη: ΟΚ, κλειστή $\underset{\in S}{\bar u_\nu} \xrightarrow{\nu\to\infty} \bar u\in\mathbb{R}^n \Rightarrow \bar u\in S \Leftrightarrow \|\bar u\|=1$

Συνθ. $\|\bar u_\nu\|=1$, θδο $\|\bar u\|=1$

$(\bar u_\nu\to\bar u \Rightarrow \|\bar u_\nu\|\to\|\bar u\| \Rightarrow =1 \to =1)$

$\big|\|\bar u_\nu\|-\|\bar u\|\big|\le\|\bar u_\nu-\bar u\|\to 0$

Από τα (*) έχουμε ότι $a:=\min\{\bar u^TA\bar u : \bar u\in S\}>0$
↑ Α θετ. ορισμένος

και ισχύει:

$\bar u^TA\bar u\ge a\|\bar u\|^2 \quad \forall \bar u\in\mathbb{R}^n$

$\bar u=0$: V

$\bar u\neq 0$ $\quad \bar u^TA\bar u=\|\bar u\|^2\Big[\underbrace{\left(\frac{\bar u}{\|\bar u\|}\right)^TA\left(\frac{\bar u}{\|\bar u\|}\right)}_{\in S\ \ge a}\Big]$ ισχύει

Έστω για $\epsilon=a/4>0$ ένα $\delta>0$ με $|\phi(\bar u)|\le\frac{a}{4}\|\bar u\|^2$ (από το (**)) $\forall\bar u\in B(\bar 0,\bar\delta)$

Τότε: $f(\bar x+\bar u)\ge f(\bar x)+\frac{a}{2}\|\bar u\|^2-\underbrace{|\phi(\bar u)|}_{\le\frac{a}{4}\|\bar u\|^2}\ge$

$\ge f(\bar x)+\frac{a}{4}\|\bar u\|^2>f(\bar x) \quad \forall\bar u\in B(\bar 0,\delta)$

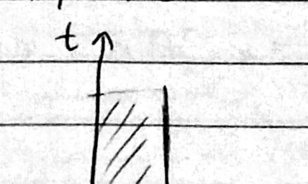
{ Ιδέα που πρέπει να θυμόμαστε
Η f(x) θετικά ορισμένος ⇔ η f συμπεριφέρεται τοπικά γύρω από το $\bar x$ όπως η $\bar u^TI\bar u=\|\bar u\|^2$ η οποία προφανώς έχει ελάχιστο στο $\bar u=0$ }

ΑΣΚΗΣΗ (87)

Βρείτε το (x,t) για το οποίο η $E(x,t)=x^2(a-x)t^2e^{-t}$ όπου $0\le x\le a$, $t\ge 0$ έχει τη μέγιστη τιμή.

Λύση

$E(x,t)\ge 0 \quad \forall (x,t)\in[0,a]\times[0,+\infty)$



με $E(0,t)=0$

$E(a,t)=0$

$E(x,t)=0$

No. Date

και $E(x,t) > 0 \quad \forall (x,t) \in (0,a) \times (0,+\infty)$.

...

$\nabla E(x,t) = 0 \Rightarrow (x,t) = \ldots$, απο τα οποια μας ενδιαφερον μονο αυτο στο $(0,a) \times (0,\infty)$

$\Rightarrow$ ΑΣΚΗΣΗ 84 (σπιτι)